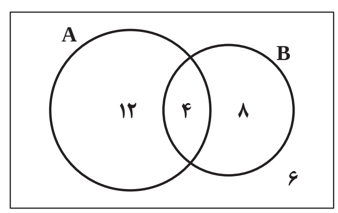
ریاضی دهم

۱. الف)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A)=۱۶\quad n(B)=۱۲,\ n(A\cup B)=۳۰-۶=۲۴$$
$$\Rightarrow ۲۴=۱۶+۱۲-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

ب) تعداد افرادی که فقط عضو انجمن فیزیک هستند: ۱۲−۴=۸

ج) تعداد افرادی که فقط عضو انجمن ریاضی هستند: ۱۶−۴=۱۲

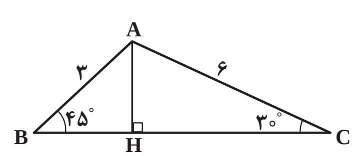


۲.

$$t_۴.t_۵=۳۲۰۰,\ t_۳=۲۰\Rightarrow\begin{cases}(t_۱.r^۳)(t_۱.r^۴)=۳۲۰۰\\ t_۱.r^۲=۲۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱^۲.r^۷=۳۲۰۰\\ t_۱^۲.r^۴=۴۰۰\end{cases}\Rightarrow\frac{t_۱^۲.r^۷}{t_۱^۲.r^۴}=\frac{۳۲۰۰}{۴۰۰}$$
$$\Rightarrow r^۳=۸,\ r=۲,\ t_۱=۵$$
$$۵,۱۰,۲۰,\ldots$$

۳. الف)

$$\Delta AHC:\sin C=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۶}\Rightarrow AH=۳$$
$$\Delta ABH:\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳}{AB}\Rightarrow AB=۳\sqrt{۲}$$



ب)

$$\Delta AHC:\cos C=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{CH}{۶}\Rightarrow CH=۳\sqrt{۳}$$
$$\Delta AHB:\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{BH}{۳\sqrt{۲}}\Rightarrow BH=۳$$
$$\Rightarrow BC=BH+CH=۳+۳\sqrt{۳}\approx ۸/۱\ \text{km}$$

۴.

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+(۱+\cos\alpha)^۲}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}$$
$$=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\cos\alpha+۱}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}=\frac{۲(۱+\cos\alpha)}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}$$
$$=\frac{۲}{\sin\alpha}=\frac{۲\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{۱}{\cos\alpha}=\frac{۲\cot\alpha}{\cos\alpha}$$

۵.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=(a^{\frac{۱}{m}})^{\frac{۱}{n}}=a^{\frac{۱}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

۶.

$$\frac{x^۵-۱۳x^۳+۳۶x}{x^۴-x^۳-۶x^۲}=\frac{x(x^۴-۱۳x^۲+۳۶)}{x^۲(x^۲-x-۶)}$$
$$=\frac{x(x^۲-۹)(x^۲-۴)}{x^۲(x-۳)(x+۲)}=\frac{x(x-۳)(x+۳)(x-۲)(x+۲)}{x^۲(x-۳)(x+۲)}$$
$$=\frac{(x+۳)(x-۲)}{x}$$

۷. اگر تعداد افراد x باشـد، هر نفر با x-۱ نفر دست داده و تعداد عمل دست دادن $\frac{x(x-۱)}{۲}$ است. (چرا؟) پس:

$$\frac{x(x-۱)}{۲}=۲۱\Rightarrow x^۲-x-۴۲=۰$$
$$\Rightarrow(x-۷)(x+۶)=۰\overset{x>۰}{\Rightarrow}x=۷$$

۸. اگر تولیدکننده x تومان تخفیف بدهد، فروش او $\frac{x}{۲}$ افزایش می‌یابد (زیرا به ازای هر ۲۰۰ تومان تخفیف ۱۰۰ تا بیشـتر می‌فروشـد). در نتیجه اگر قیمت فروش او x−۶۰۰۰ باشـد، تعداد فروش ماهانهٔ او $۱۰۰۰+\frac{x}{۲}$ است و قیمت تولید او نیز $(۱۰۰۰+\frac{x}{۲})۳۰۰۰$ خواهد بود. پس سـود خالص او برابر است با:

$$y=(۶۰۰۰-x)(۱۰۰۰+\frac{x}{۲})-۳۰۰۰(۱۰۰۰+\frac{x}{۲})$$
$$\Rightarrow y=۶۰۰۰۰۰۰+۳۰۰۰x-۱۰۰۰x-\frac{۱}{۲}x^۲-۳۰۰۰۰۰۰-۱۵۰۰x$$
$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۵۰۰x+۳۰۰۰۰۰۰$$

نمودار این تابع سهمی است که طول رأس آن $x=\frac{-b}{۲a}=۵۰۰$ است. پس به ازای x=۵۰۰ ماکزی‌مم می‌شـود. یعنی فروشنده باید ۵۰۰ تومان تخفیف بدهد و اسـباب‌بازی را به قیمت ۵۵۰۰ تومان بفروشد که در این صـورت می‌توانـد ۱۲۵۰ عدد از آن را بفروشـد و از آنجا سـود او در ماه ۳/۱۲۵/۰۰۰ تومان خواهد بود که حداکثر سود ممکن است.

۹.

$$y>۰\Rightarrow \frac{mx^۲+mx+۱}{x^۲+۱}>۰,\ x^۲+۱>۰$$

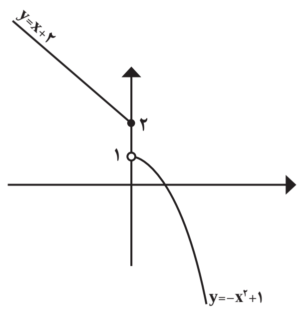
$$\Rightarrow mx^۲+mx+۱>۰ \quad \Delta=m^۲-۴m<۰,\ a=m>۰$$

$m^۲-۴m=۰\Rightarrow m(m-۴)=۰\Rightarrow m=۰$ یا $m=۴$

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m^۲-۴m$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow ۰<m<۴$

۱۰.



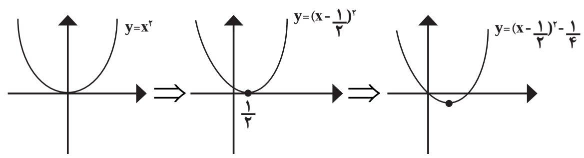
$$D_f=R,\ R_f=R-[۱,۲)$$
$$f(۱)=-۱+۱=۰\Rightarrow f(f(۱))$$
$$=f(۰)=۲\Rightarrow f(f(f(۱)))$$
$$=f(۲)=-۴+۱=-۳$$

۱۱.

$$g(x)=ax+b,\ f(x)=x\Rightarrow f(۲)=۲$$
$$\Rightarrow (۲,۲)\in g\Rightarrow ۲a+b=۲,\ g(-۱)=۰\Rightarrow -a+b=۰$$
$$\Rightarrow a=b\Rightarrow ۲a+a=۲,\ a=\frac{۲}{۳},\ b=\frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow g(x)=\frac{۲}{۳}x+\frac{۲}{۳}$$

۱۲.

$$f(x)=x^۲-x=(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$$



۱۳. الف) کلمات بدون حرف «ی» از چهار حرف گ، ل، ر و ا تشکیل می‌شوند:

$\boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱}$ $\quad ۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

ب) کلمات با حرف «ی» که باید ی در آخر باشد:

$\overset{ی}{\boxed{۱}}\ \boxed{۲}\ \boxed{۳}\ \boxed{۴}$ $\quad ۱\times۴\times۳\times۲=۲۴$

پس در مجموع ۲۴+۲۴، یعنی ۴۸ کلمه می‌توان نوشت.

۱۴. باید دو حرف را از میان حروف b، c، d و e انتخاب و حرف a را به آن‌ها اضافه کرد:

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

۱۵. الف) دو مهره باید از بین مهره‌های سیاه و قرمز انتخاب شوند:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۰}{۲۸}=\frac{۵}{۱۴}$$

ب) احتمال همرنگ بودن دو مهره:

$$P(B')=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳+۳+۱}{۲۸}=\frac{۱}{۴}$$

احتمال همرنگ نبودن:

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۱۶. **الف)** کمی گسسته **ب)** کیفی اسمی

ج) کمی پیوسته **د)** کیفی ترتیبی

هندسهٔ دهم

۱. **الف)** کتاب درسی صفحهٔ ۱۴

ب) کتاب درسی صفحهٔ ۱۵

۲. کتاب درسی صفحهٔ ۲۰

۳. **اثبات با برهان خلف:** فرض می‌کنیم در یک مثلث ABC، هیچ‌یک از زوایا کوچکتر یا مساوی ۶۰° نباشند، بنابراین هر سه زاویه بزرگتر از ۶۰° هستند. پس:

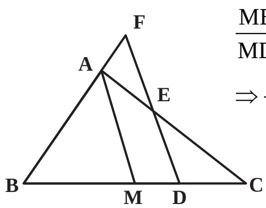
$$\hat{A}>۶۰^\circ,\ \hat{B}>۶۰^\circ,\ \hat{C}>۶۰^\circ\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>۱۸۰^\circ$$

و این ناممکن است.

۴. کوتاه‌ترین ارتفاع متناظر با بلندترین ضلع است. بنابراین داریم:

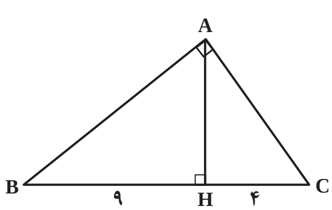
$$\frac{۸}{h_۱}=\frac{۱۷}{۲۱},\ \frac{۸}{h_۲}=\frac{۱۰}{۲۱}\Rightarrow h_۱=\frac{۱۶۸}{۱۷},\ h_۲=\frac{۱۶۸}{۱۰}=\frac{۸۴}{۵}$$

۵. به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های BFD و AMC می‌توان نوشت:



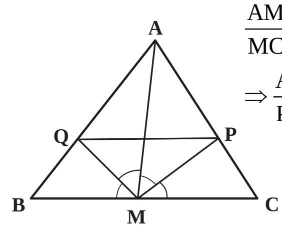
$$\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{AF},\ \frac{MC}{MD}=\frac{AC}{AE},\ MB=MC$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AE}$$

۶.



$$AH^۲=BH.CH=۹\times۴=۳۶\Rightarrow AH=۶$$
$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۳۶+۸۱=۱۱۷$$
$$AC^۲=AH^۲+CH^۲=۱۶+۳۶=۵۲$$
$$\Rightarrow AB=\sqrt{۱۱۷}=۳\sqrt{۱۳},\ AC=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

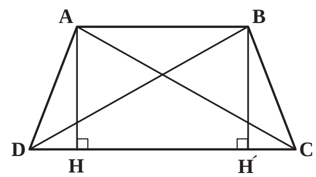
۷. به کمک قضیهٔ نیمسازها و عکس قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC},\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB},MB=MC$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}\Rightarrow PQ \parallel BC$$

۸.



فرض	AC=BD, AB‖CD
حکم	AD=BC

اثبات: از A و B عمودهای AH و BH´ را بر CD رسم می‌کنیم.

$$\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ, AB \parallel HH', AH \parallel BH'$$

$$\Rightarrow \underset{\text{مستطیل}}{ABBH'} \Rightarrow AH=BH'$$

$$BD=AC, BH'=AH \overset{\text{وتر و یک ضلع}}{\Rightarrow} \Delta ACH \cong \Delta BDH'$$

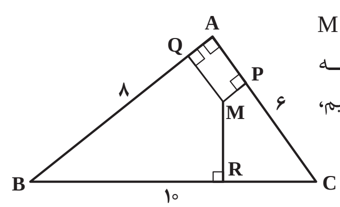
$$\Rightarrow DH'=CH' \Rightarrow DH+HH'=CH'+HH'$$

$$\Rightarrow DH=CH', AH=BH', \hat{H}=\hat{H}'$$

$$\overset{\text{ض‌زض}}{\Rightarrow} \Delta ADH \cong \Delta BCH' \Rightarrow AD=BC$$

۹. قضیهٔ کتاب درسی صفحهٔ ۶۰

۱۰. مثلث قائم‌الزاویه است. (چرا؟) حال اگر از نقطهٔ M (MP=۱ و MQ=۲) به رأس‌های مثلث وصل کنیم، خواهیم داشتم:



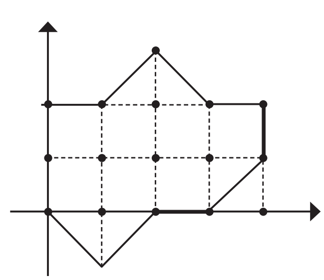
$$S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MAC}+S_{MBC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB.AC}{۲}=\frac{۱}{۲}MQ.AB+\frac{۱}{۲}MP.AC+\frac{۱}{۲}MR.BC$$

$$\Rightarrow ۶\times ۸=۲\times ۸+۱\times ۶+۱۰\,MR \Rightarrow ۱۰\,MR=۲۶$$

$$\Rightarrow MR=۲/۶$$

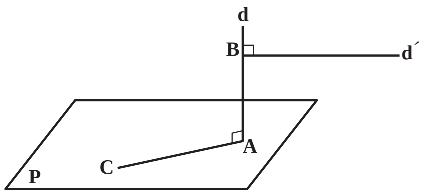
۱۱. به‌صورت مقابل می‌توان چندضلعی را در یک دستگاه مختصات قرار داد:



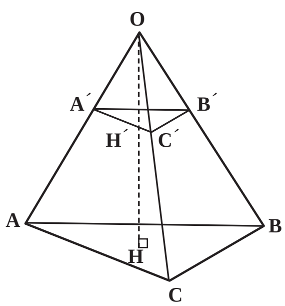
حال به کمک قضیهٔ پیک داریم:

$$S=i+\frac{b}{۲}-۱=۵+\frac{۱۱}{۲}-۱=۹/۵$$

۱۲. AC و d´ هر دو بر d (AB) عمودند. اگر AC و d´ و AB در یک صفحه باشند، داریم: AC‖d´ و اگر نباشند، d´ و AC متنافرند. بنابراین d´ و AC موازی یا متنافرند.



۱۳. سطح مقطع، مثلثی موازی با صفحهٔ مثلث ABC است. این مثلث با مثلث قاعده متشابه است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مربع نسبت تشابه آن‌هاست:



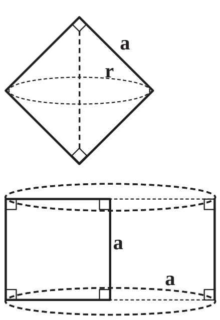
$$k^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{A'C'}{AC}=\frac{۱}{۳},$$

$$A'C' \parallel AC \Rightarrow \frac{A'C'}{AC}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OH'}{OH}=\frac{۱}{۳}$$

یعنی H´، OH را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کند:

HH'=۲OH´

۱۴. در مرحلهٔ اول از این دوران دو مخروط که قاعدهٔ آن‌ها مشترک است حاصل می‌شود و در مرحلهٔ دوم یک استوانه به‌دست می‌آید.



$$V_۱=(\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h)\times ۲, r=h=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow V_۱=\frac{۲}{۳}\pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a)^۳=\frac{\pi\sqrt{۲}a^۳}{۶}\\&V_۲=(\pi a^۲).a=\pi a^۳\end{aligned}\right\}$$

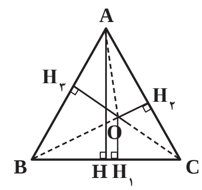
$$\Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}\Rightarrow V_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۶}V_۲$$

هندسهٔ ۲ (سوم ریاضی)

۱.

مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
مساحت باقی‌مانده	۱	$\frac{۳}{۴}$	$(\frac{۳}{۴})^۲$	$(\frac{۳}{۴})^۳$	...	$(\frac{۳}{۴})^n$

۲.

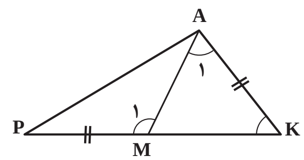


$$S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC} + S_{OAB}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AH.a = \frac{۱}{۲}OH_۲.a + \frac{۱}{۲}OH_۱.a + \frac{۱}{۲}OH_۳.a$$
$$\Rightarrow AH.a = (OH_۱ + OH_۲ + OH_۳)a$$
$$\Rightarrow OH_۱ + OH_۲ + OH_۳ = AH = \text{مقدار ثابت}$$

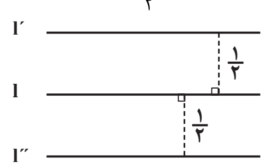
۳. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۲۵)

۴.

$$\left.\begin{array}{l} AM = AM \\ PM = AK \\ \hat{M}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{K} \Rightarrow \hat{M}_۱ > \hat{A}_۱ \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{لولا}]{\text{قضیهٔ}} AP > MK$$



۵. دو خط راست موازی L در دو طرف آن و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ از آن.



۶. الف) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی (گزینهٔ ۳)

ب) عمودمنصف‌های اضلاع (گزینهٔ ۲)

۷. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۶۰)

۸.

$$A\hat{O}C = \widehat{AC}, A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{۲}$$
$$\Rightarrow \alpha + ۱۶ = \frac{۳\alpha + ۱۲}{۲} \Rightarrow ۳\alpha + ۱۲ = ۲\alpha + ۳۲$$
$$\Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ, A\hat{O}C = ۷۲^\circ, A\hat{B}C = ۳۶^\circ$$

۹. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۷۴)

۱۰.
$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲}$$
$$= ۱۲ = ۵x - ۸ \Rightarrow x = ۴$$

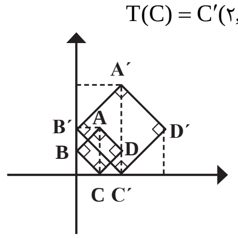
۱۱. الف) یک چندضلعی که رأس‌های آن روی محیط دایره‌ای باشند.

ب) تبدیل هندسی که فاصله‌ها را حفظ کند.

ج) دو خطی که در یک صفحه نباشند و نقطهٔ مشترکی ندارند.

۱۲.
$$\text{بردار انتقال} = \vec{u} = (-۲,۱) - (۳,-۱) = (-۵,۲)$$
$$\Rightarrow T(x,y) = (x - ۵, y + ۲)$$

۱۳. الف)
$$T(x,y) = (۲x, ۲y)$$
$$\Rightarrow T(A) = A'(۲,۴), T(B) = B'(۰,۲)$$
$$T(C) = C'(۲,۰), T(D) = D'(۴,۲)$$



ب) $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^۲ = ۴$

ج) $k > ۱ \Rightarrow$ انبساط

۱۴. دو خط موازی هستند، پس محور تقارن آن‌ها، خط راستی است که از وسط آن‌ها و موازی با آن‌ها (با همان شیب) رسم می‌شود:

$$D: x + y - ۳ = ۰, \quad D': x + y + ۳ = ۰$$
$$A(۲,۱) \in D, \quad A'(-۲,-۱) \in D'$$
$$M(۰,۰): AB \text{ وسط} \Rightarrow y - ۰ = -۱(x - ۰)$$
$$\Rightarrow y = -x \text{ محور تقارن}$$

۱۵. نقطهٔ G، مرکز ثقل مثلث را به‌عنوان مرکز دوران با زاویهٔ $\alpha = ۱۲۰^\circ$ در نظر بگیرید.

$$\left.\begin{array}{l} A \to B \\ D \to E \end{array}\right\} \Rightarrow AD \to BE$$

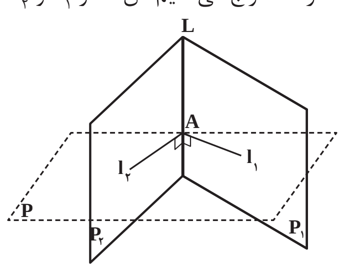
چون دوران ایزومتری است، پس: AD=AE و خط و تبدیل یافتهٔ آن با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند، پس: $E\hat{F}D = ۱۲۰^\circ$.

۱۶. الف) درست   **ب)** نادرست   **ج)** نادرست

د) نادرست   **هـ)** درست

۱۷. نقطهٔ A روی فصل مشترک دو صفحه را در نظر می‌گیریم و از A خطی موازی L رسم می‌کنیم. طبق قضایای قبلی، این خط به تمامی در صفحهٔ P و به تمامی در صفحهٔ P′ واقع است، پس این خط همان فصل مشترک دو صفحه و با L موازی است.

۱۸. از L دو صفحهٔ دلخواه $P_۱$ و $P_۲$ را می‌گذرانیم. سپس در این صفحات خطوط $L_۱$ و $L_۲$ را عمود بر L از A اخراج می‌کنیم. آن‌گاه از $L_۱$ و $L_۲$ صفحهٔ P را می‌گذرانیم. L بر $L_۱$ و $L_۲$ عمود است، پس بر صفحهٔ گذرا از آن‌ها (P) عمود است و P صفحهٔ مطلوب ماست.



۱۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}$. پس: $AC>AB$. بنابراین اگر C نقطه‌ای دلخواه روی P باشد، AB کوتاه‌ترین فاصلهٔ A تا نقاط روی P است.

جبر و احتمال

۱. الف) استدلال استنتاجی **ب)** استدلال استقرایی
ج) استدلال بازگشتی

۲.

$$P(۱):۱^{۳}=(\frac{۱\times۲}{۲})^{۲}:۱=۱$$

$$P(k):۱^{۳}+۲^{۳}+...+k^{۳}=(\frac{k(k+۱)}{۲})^{۲}$$

$$P(k+۱):\underbrace{۱^{۳}+۲^{۳}+...+k^{۳}}_{P(k)}+(k+۱)^{۳}=(\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲})^{۲}$$

$$(\frac{k(k+۱)}{۲})^{۲}+(k+۱)^{۳}=(k+۱)^{۲}\left[\frac{k^{۲}}{۴}+k+۱\right]$$

$$=\frac{(k+۱)^{۲}(k^{۲}+۴k+۴)}{۴}=\frac{(k+۱)^{۲}(k+۲)^{۲}}{۴}=\left[\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}\right]^{۲}$$

۳. الف) $(a-b)^{۲}\geq ۰\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۲ab\geq ۰\Rightarrow ۲ab\leq a^{۲}+b^{۲}$

$$\Rightarrow ab\leq\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}$$

ب) $\sqrt{۲}\in Q',-\sqrt{۲}\in Q',\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\notin Q'$

۴. بـرای حــرف اول نام ۳۲ حالت و برای حرف اول نام خانوادگی هم ۳۲ حالت وجــود دارد. پس برای ترکیب آن‌ها طبق اصل ضرب، ۳۲×۳۲ یا ۱۰۲۴ حالت متمایز داریم و: ۳۰۷۳=۳×۱۰۲۴+۱. پس لااقل ۴ نفر هستند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها یکی است.

۵. الف) ۴ **ب)** ۲± **ج)** ۲۰

۶.

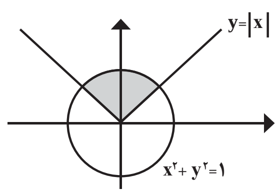
$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')$$

$$=[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$$

$$=[(A\cup B)\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}]\cap[\underbrace{(A\cup A')}_{U}\cap(A'\cup B')]$$

$$=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

۷.



۸.

$$A=\{۱,۲\}\cup\{۳\}=\{۱,۳\}\cup\{۲\}=\{۲,۳\}\cup\{۱\}$$

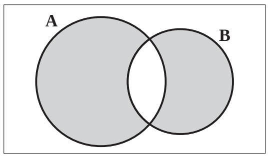
$$=\{۱\}\cup\{۲\}\cup\{۳\}$$

۹. الف)

$$\left.\begin{cases}(a,b)R(c,d)\Rightarrow a=c\\(c,d)R(e,f)\Rightarrow c=e\end{cases}\right\}\Rightarrow a=e\Rightarrow(a,b)R(e,f)$$

ب) $(x,y)R(۲,۱)\Rightarrow x=۲\Rightarrow[(۲,۱)]=\{(x,y)|x=۲\}$

۱۰.



۱۱. الف) S={(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,پ),(ر,پ)}
$\Rightarrow n(S)=۸$

ب) S={(ر,۲),(ر,۴),(ر,۶),(پ,پ),(ر,پ)}

۱۲. $n(S)=۶\times۶=۳۶,\ A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۳۶}$$

۱۳.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{۲۱+۶}{۵۵}=\frac{۲۷}{۵۵}$$

۱۴.

$$P(A)=\frac{\binom{۲۰}{۸}}{۲^{۲۰}}$$

۱۵.

$$P(a)=P(c)=\frac{۱}{۲}P(b),P(a)+P(b)+P(c)=۱$$

$$\Rightarrow P(a)+۲P(a)+P(a)=۱\Rightarrow P(a)=P(b)=\frac{۱}{۴}$$

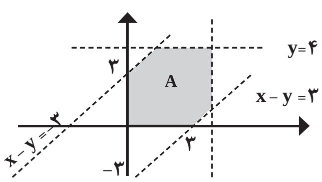
$$\Rightarrow P(b\ \text{یا}\ a)=P(a)+Pb)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۶.

$$S=\{(x,y)|۰\leq x,y\leq ۴\},$$

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S,|x-y|<۳\}$$

$$-۳<x-y<۳$$



$$P(A)=\frac{S_A}{S_S}=\frac{۴\times۴-۲(\frac{۱}{۲})}{۴\times۴}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۷.

بخش‌پذیری بر ۳و۵ :**A∩B** و بخش‌پذیری بر ۵: **B** و بخش‌پذیری بر ۳: **A**

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{\left[\frac{۴۰}{۳}\right]}{۴۰}-\frac{\left[\frac{۴۰}{۱۵}\right]}{۴۰}=\frac{۱۳}{۴۰}-\frac{۲}{۴۰}=\frac{۱۱}{۴۰}$$

حسابان (سوم ریاضی)

۱.

$$P(۱)=۴,\ P(-۲)=۰\Rightarrow a+b+۲=۴,$$

$$-۸+۴a-۲+b=۰$$

$$\begin{cases}۴a+b=۱۰\\a+b=۲\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۸}{۳},b=-\frac{۲}{۳}$$

۲.

$$X=\frac{1}{x+1}\Rightarrow x=\frac{1}{X}-1$$

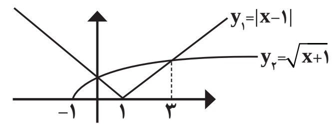
$$(\frac{1}{X}-1)^2-2(\frac{1}{X}-1)-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^2}-\frac{2}{X}+1-\frac{2}{X}+2-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^2}-\frac{4}{X}+2=0\Rightarrow 2X^2-4X+1=0$$

۳.

$$|x-1|\le\sqrt{x+1}\Rightarrow 0\le x\le 3$$



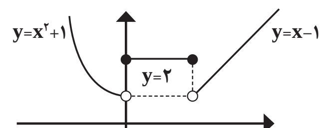
۴. الف) درست

ب) نادرست (طول نقطهٔ ماکزی‌مم ۲۰ است و نه عرض آن)

ج) درست $(y=\frac{7}{x}+3\Rightarrow x=\frac{7}{y-3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7}{x-3})$

د) نادرست $(f(x)=|\sin x|)$

۵.



$$R_f=(1,+\infty)$$

۶.

$$D_f=R-\{0\},D_g=R-\{1\}$$

$$D_{fog}=\left\{x\,\middle|\,x\in D_g,g(x)\in D_f\right\}$$

$$=\left\{x\,\middle|\,x\in R-\{1\},\frac{x+2}{x-1}\in R-\{0\}\right\}$$

$$\frac{x+2}{x-1}=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow x\ne-2$$

$$\Rightarrow D_{fog}=R-\{1,-2\}$$

ب) $fog(x)=f(g(x))=f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{1}{(\frac{x+2}{x-1})}=\frac{x-1}{x+2}$

ج) $(g-f)(2)=g(2)-f(2)=\frac{2+2}{2-1}-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

۷.

$$D_f=R-\{0\},f(-x)=\frac{(-x)^2-\cos(-x)}{|-x|}$$

$=\frac{x^2-\cos x}{|x|}=f(x)\Rightarrow$ f زوج است.

۸.

$$\cos3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos2\alpha.\cos\alpha-\underbrace{\sin2\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha}.\sin\alpha$$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-(2\sin^2\alpha\cos\alpha)$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$

$$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

۹.

$$\sin x(2\sin x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi\\ x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

۱۰.

$$\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow\cos(\sin^{-1}(\frac{3}{5}))=\frac{4}{5}$$

۱۱.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

در نتیجه f در x=0 حد ندارد، زیرا حد چپ و راست آن مساوی نیستند.

۱۲.

الف)

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-x^2-x+4x+4}{2(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2(x+1)-x(x+1)+4(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+4)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{1+1+4}{2(-1-1)}=-\frac{3}{2}$$

ب)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\left[\frac{\sin2x}{2x}\times2x\right]^2}{2\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{x}{2}\right]^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{\frac{x^2}{2}}=8$$

۱۳. $D_f=(-\infty,1]\quad\lim_{x\to1^-}f(x)=\sqrt{1-1}=0,\ f(1)=0$

بنابراین f در a=1 پیوسته است.

۱۴.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

۱۵.

الف) $f'(x)=5(x^3-x^2-1)^4(3x^2-2x)$

ب) $g'(x)=\frac{(4x^3-\cos x)(1+\cos x)-(-\sin x)(x^4-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

ج) $h'(x)=(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})\tan^{-1}x+\frac{1}{1+x^2}(x-\sqrt{x}+5)$

۱۶.

$$\left.\begin{matrix}m=f'(x)=3x^2-2\\ y=x\Rightarrow m=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3x^2-2=1$$

$$\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x=\pm1\quad A\left|\begin{matrix}1\\-7\end{matrix}\right.,\quad B\left|\begin{matrix}-1\\-5\end{matrix}\right.$$